



ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2026
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

03/06/2026



...για εμάς, τα δικά σου όνειρα!

ΔΕΣΠΟ



...για εμάς, τα δικά σου όνειρα!

ΔΕΣΠΟΙΝΑ Σ. ΠΑΠΠΑ - ΝΙΚΟΣ ΣΤ. ΚΕΜΕΝΕΣ

Θέμα Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελ. 133

A2. Σχολικό βιβλίο σελ. 51

A3. Σχολικό βιβλίο σελ. 185

A4. (α) Λάθος

(β) Σωστό

(γ) Σωστό

(δ) Σωστό

(ε) Λάθος

Θέμα Β

B1. Έχουμε $f(x) = 2\ln(x - 1)$ με $D_f = (1, +\infty)$.

Έχουμε $g(x) = \sqrt{x - 2} + 1$ με $D_g = [2, +\infty)$.

$$D_h = D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [2, +\infty) \mid g(x) \in (1, +\infty)\}$$

$$\text{Είναι } g(x) \in (1, +\infty) \Leftrightarrow g(x) > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x - 2} + 1 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x - 2} > 0 \Leftrightarrow x > 2.$$

$$\text{Συνεπώς } D_h = \{x \geq 2 \mid x > 2\} = (2, +\infty).$$

Για $x \in (2, +\infty)$ παίρνουμε τα παρακάτω.

$$\begin{aligned} h(x) &= (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x - 2} + 1) = 2\ln(\sqrt{x - 2} + 1 - 1) = \\ &= 2\ln(\sqrt{x - 2}) = 2\ln(x - 2)^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln(x - 2) = \ln(x - 2) \end{aligned}$$

B2. Έστω $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ τέτοια ώστε $h(x_1) = h(x_2)$.

$$h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow \ln(x_1 - 2) = \ln(x_2 - 2) \Leftrightarrow x_1 - 2 = x_2 - 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η h είναι 1-1. Άρα η h αντιστρέφεται.

Για $x > 2$ λύνουμε την εξίσωση $y = h(x)$ ως προς x .

$$\text{Έχουμε } h(x) = y \Leftrightarrow \ln(x - 2) = y \Leftrightarrow x - 2 = e^y \Leftrightarrow x = e^y + 2$$

Όμως $x > 2 \Leftrightarrow e^y + 2 > 2 \Leftrightarrow e^y > 0$, που ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον έχουμε $h(x) = y \Leftrightarrow x = h^{-1}(y)$. Συνεπώς παίρνουμε τα παρακάτω.

$$h^{-1}(y) = e^y + 2$$

Οπότε η αντίστροφη είναι $h^{-1}(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}$.

B3. Παίρνουμε τα παρακάτω.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\ln(x-2) \cdot \frac{2\ln(x-1)}{x-2} \right) = \ell$$

Θέτω $y = x - 2$. Έχουμε ότι $y \rightarrow 0^+$.

$$\ell = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\ln y \cdot \frac{2\ln(y+1)}{y} \right)$$

$$\ell_1 = \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty$$

$$\ell_2 = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{2\ln(y+1)}{y} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(2\ln(y+1))'}{(y)'} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{y+1}}{1} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{2}{y+1} = 2$$

Συνεπώς $\ell = \ell_1 \cdot \ell_2 = -\infty \cdot 2 = -\infty$.

Θέμα Γ

Γ1. i) Εφόσον η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, παίρνουμε τα ακόλουθα.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1} \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\kappa x) = \begin{cases} +\infty, \text{ για } \kappa > 0 \\ -\infty, \text{ για } \kappa < 0 \\ 0, \text{ για } \kappa = 0 \end{cases}$$

Όμως εφόσον $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1} \in \mathbb{R}$ παίρνουμε ότι $\kappa = 0$.

ii) Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως ρητή.

$$\text{Για } \kappa = 0 \text{ είναι } f(x) = \frac{\mu x}{x^2 + 1}.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\mu x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{(\mu x)'(x^2 + 1) - (x^2 + 1)' \cdot \mu x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu(x^2 + 1) - 2x \cdot \mu x}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{\mu x^2 + \mu - 2\mu x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-\mu x^2 + \mu}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Εφόσον η $y = x$ εφάπτεται της C_f στην αρχή των αξόνων, παίρνουμε $f'(0) = 1$.

$$\text{Άρα } \frac{-\mu \cdot 0^2 + \mu}{(0^2 + 1)^2} = 1 \Leftrightarrow \mu = 1.$$

Γ2. i) Η συνάρτηση f μετασχηματίζεται ως εξής.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-	
f	↘	↗	↘	
		T.E.	T.M.	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = -1$ το $f(-1) = -\frac{1}{2}$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 1$ το $f(1) = \frac{1}{2}$.

ii) Παίρνουμε τα παρακάτω.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$f(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Από τον πίνακα μονοτονίας της f , παίρνουμε τα παρακάτω.

$$\text{Θέτουμε } A_1 = \left[-\frac{1}{2}, 0\right), A_2 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], A_3 = \left(0, \frac{1}{2}\right].$$

$$\text{Τότε } f(\mathbb{R}) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \left(0, \frac{1}{2}\right] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Τώρα, θα βρούμε το πλήθος των ριζών της παρακάτω εξίσωσης για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$$

1η περίπτωση

$$\frac{1}{2} + \alpha^2 \notin f(\mathbb{R})$$

Τότε παίρνουμε τα παρακάτω.

$$\frac{1}{2} + \alpha^2 \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \alpha^2 \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \alpha^2 < -\frac{1}{2} \text{ ή } \frac{1}{2} + \alpha^2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\alpha^2 < -1 \text{ ή } 1 + 2\alpha^2 > 1 \Leftrightarrow 2\alpha^2 < -2 \text{ ή } 2\alpha^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 < -1 \text{ ή } \alpha^2 > 0$$

Η ανίσωση $\alpha^2 < -1$ είναι αδύνατη ως προς α . Συνεπώς πρέπει $\alpha^2 > 0$. Ισοδύναμα πρέπει να ισχύει ότι $\alpha \neq 0$.

Όμως στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ είναι αδύνατη, διότι

$\frac{1}{2} + \alpha^2 \notin f(\mathbb{R})$. Άρα για $\alpha \neq 0$ η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ έχει πλήθος ριζών 0.

2η περίπτωση

$$\frac{1}{2} + \alpha^2 \in f(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \alpha^2 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + \alpha^2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \alpha^2 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

Συνεπώς παίρνουμε ότι $\alpha = 0$.

$$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Συνεπώς για $\alpha = 0$, το πλήθος των ριζών της εν λόγω εξίσωσης είναι 1.

Γ3. i) Έστω $n \in \mathbb{N}$. Παίρνουμε τα παρακάτω.

$$\begin{aligned}
I_v + I_{v+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2(v+1)+1}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^{2v+1}}{x^2+1} + \frac{x^{2v+3}}{x^2+1} \right) dx = \\
&= \int_0^1 \frac{x^{2v+1} + x^{2v+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}(1+x^2)}{x^2+1} dx = \int_0^1 x^{2v+1} dx = \left[\frac{x^{2v+2}}{2v+2} \right]_0^1 = \\
&= \frac{1^{2v+2}}{2v+2} - \frac{0^{2v+2}}{2v+2} = \frac{1}{2v+2}
\end{aligned}$$

ii) Παίρνουμε τα παρακάτω.

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$$

Θέτω $u = x^2 + 1$. Παίρνουμε $du = (x^2 + 1)' dx = 2x dx$. Επιπλέον παίρνουμε ότι:

$$u_1 = 0^2 + 1 = 1$$

$$u_2 = 1^2 + 1 = 2$$

$$I_0 = \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{2u} du = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} [\ell n u]_1^2 = \frac{1}{2} (\ell n 2 - \ell n 1) = \frac{\ell n 2}{2}$$

Τώρα χρησιμοποιούμε τον αναδρομικό τύπο που αποδείξαμε στο ερώτημα Γ3i για να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα I_1 και I_2 .

$$I_0 + I_1 = \frac{1}{2 \cdot 0 + 2} \Leftrightarrow \frac{\ell n 2}{2} + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1 - \ell n 2}{2}$$

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{2 \cdot 1 + 2} \Leftrightarrow \frac{1 - \ell n 2}{2} + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1 - \ell n 2}{2} = \frac{2\ell n 2 - 1}{4}$$

Θέμα Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = g(x) + x$, $x \in [-1, 0]$.

Η h είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων στο $[-1, 0]$.

Είναι $h(-1) = g(-1) - 1 < 1 - 1 = 0$ και $h(0) = g(0) + 0 = g(0) > 0$. Συνεπώς παίρνουμε ότι $h(-1)h(0) < 0$.

Άρα από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $h(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι το x_1 είναι μοναδικό. Πράγματι, έστω προς άτοπον ότι υπάρχει $x_2 \neq x_1$ τέτοιο ώστε $g(x_2) + x_2 = 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 0)$ ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων στο $(-1, 0)$.

Η h είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων στο $[-1, 0]$.

Είναι $h(x_1) = h(x_2) = 0$, αφού $g(x_1) + x_1 = g(x_2) + x_2 = 0$.

Άρα από το θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει ότι $h'(x_0) = 0$. Όμως για κάθε $x \in [-1, 0]$ έχουμε τα παρακάτω.

$$h'(x) = (g(x) + x)' = g'(x) + 1$$

Άρα $h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow g'(x_0) + 1 = 0 \Leftrightarrow g'(x_0) = -1$. Το τελευταίο είναι άτοπο, διότι από την υπόθεση, έχουμε ότι $g'(x) \neq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς παίρνουμε ότι το x_1 είναι μοναδικό.

Δ2. Έχουμε τα παρακάτω.

$$f(x) = \begin{cases} x^2(g(x) + x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - \kappa x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη, ειδικότερα θα είναι παραγωγίσιμη στο $x_3 = 0$. Συνεπώς παίρνουμε τα παρακάτω.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(g(x) + x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(g(x) + x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} x(g(x) + x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - \kappa x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\varepsilon\phi x}{x} - \frac{\kappa x}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \kappa \right) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - \kappa = 3 - \kappa$$

Συνεπώς πρέπει να ισχύει ότι $3 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3$.

Δ3. i) Παίρνουμε τα παρακάτω.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - 3x)' = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x + 1 - 3\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x + 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 x(\sigma\upsilon\nu x - 1) + (1 - \sigma\upsilon\nu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\sin x - 1)(2\sin^2 x - 1 - \sin x)}{\sin^2 x} = \frac{(\sin x - 1)(\sin^2 x - 1 + \sin^2 x - \sin x)}{\sin^2 x} = \\
&= \frac{(\sin x - 1)[(\sin x - 1)(\sin x + 1) + \sin x(\sin x - 1)]}{\sin^2 x} = \\
&= \frac{(\sin x - 1)^2(2\sin x + 1)}{\sin^2 x}
\end{aligned}$$

Για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε ότι $f'(x) > 0$. Για $x = 0$ έχουμε ότι $f'(x) = 0$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Εφόσον η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Άρα είναι $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ii) Θεωρούμε την παρακάτω συνάρτηση.

$$t(x) = f(x) - \frac{\pi}{3} = 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x - \frac{\pi}{3}, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Η t είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\text{Είναι } t(0) = 2\eta\mu 0 + \epsilon\phi 0 - 3 \cdot 0 - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} < 0.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} t(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x - \frac{\pi}{3}\right) = +\infty > 0.$$

$$\text{Άρα } t(0) \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} t(x) < 0.$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_2) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 3f(x_2) = \pi.$$

Από το ερώτημα Δ3i γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{\pi}{3}$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Συμπερασματικά, η εξίσωση $3f(x) = \pi$ έχει ακριβώς μία λύση.

Δ4. i) Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = 0$. Για $x \in [x_1, 0)$ έχουμε $f(x) = x^2(g(x) + x)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = g(x) + x, x \in [x_1, 0]$. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1, 0]$ ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων στο $[x_1, 0]$. Μάλιστα παίρνουμε ότι $\varphi'(x) = (g(x) + x)' = g'(x) + 1$.

Εφόσον η g' είναι συνεχής στο \mathbb{R} και $g'(x) \neq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η φ' διατηρεί πρόσημο στο $[x_1, 0]$, άρα είτε $\varphi'(x) > 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$ ή $\varphi'(x) < 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$.

Αν $\varphi'(x) > 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$, τότε η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, 0]$. Συνεπώς παίρνουμε ότι $x \geq x_1 \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(x_1) \Rightarrow \varphi(x) \geq g(x_1) + x_1 = 0$.

Αν $\varphi'(x) < 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$, τότε η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, 0]$. Συνεπώς παίρνουμε ότι $x \leq 0 \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(0) = g(0) + 0 = g(0) > 0$.

Σε κάθε περίπτωση $\varphi(x) \geq 0 \Rightarrow x^2 \varphi(x) \geq 0 \Rightarrow x^2(g(x) + x) \geq 0$.

Από τα παραπάνω, παίρνουμε ότι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [x_1, 0]$.

ii) Παίρνουμε τα παρακάτω.

$$\int_{x_1}^0 |f(x)| dx = \int_0^{f(x_2)} |f(x)| dx \Leftrightarrow \int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^0 x^2(g(x) + x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) dx$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ell\eta\left(\sigma\upsilon\nu x\right) - \frac{3x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right) - \ell\eta\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 + 2\sigma\upsilon\nu 0 + \ell\eta(\sigma\upsilon\nu 0) + \frac{3 \cdot 0^2}{2} =$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{2} - \ell\eta\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi^2}{9} + 2 \cdot 1 = 1 + \ell\eta 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

$$I_2 = \int_{x_1}^0 x^2(g(x) + x) dx = \int_{x_1}^0 \left(\frac{x^3}{3}\right)' (g(x) + x) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} (g(x) + x) \right]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} (g(x) + x)' dx =$$

$$= \frac{0^3}{3} (g(0) + 0) - \frac{x_1^3}{3} (g(x_1) + x_1) - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} (g'(x) + 1) dx =$$

$$= -\frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 (g'(x) + 1) dx = -\frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 dx =$$

$$= -\frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx - \frac{1}{3} \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x_1}^0 = -\frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx - \frac{1}{3} \cdot \frac{0^4}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x_1^4}{4} =$$

$$= -\frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx + \frac{x_1^4}{12}$$

Συνεπώς παίρνουμε τα παρακάτω.

$$I_2 = I_1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx + \frac{x_1^4}{12} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = -\frac{x_1^4}{12} - \frac{\pi^2}{6} + \ln 2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3 \ln 2 - 3$$

