ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2026
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

03/06/2026

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 133

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 51

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 185

Α4. **(α)** Λάθος

(β) Σωστό

(γ) Σωστό

(δ) Σωστό

(ε) Λάθος

Θέμα Β

Β1. Έχουμε $f(x) = 2\ell n(x-1)$ με $D_f = (1, +\infty)$.

Έχουμε $g(x) = \sqrt{x-2} + 1$ με $D_g = [2, +\infty)$.

$D_h = D_{f\,o\,g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [2, +\infty) \mid g(x) \in (1, +\infty)\}$

Είναι $g(x) \in (1, +\infty) \Leftrightarrow g(x) > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} + 1 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Συνεπώς $D_h = \{x \geq 2 \mid x > 2\} = (2, +\infty)$.

Για $x \in (2, +\infty)$ παίρνουμε τα παρακάτω.

$$h(x) = (f\,o\,g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(\sqrt{x-2} + 1\big) = 2\ell n\big(\sqrt{x-2} + 1 - 1\big) =$$

$$= 2\ell n\big(\sqrt{x-2}\big) = 2\ell n(x-2)^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ell n(x-2) = \ell n(x-2)$$

Β2. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η f είναι 1 – 1.

Έστω $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ τέτοια ώστε $h(x_1) = h(x_2)$.

$h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow \ell n(x_1 - 2) = \ell n(x_2 - 2) \Leftrightarrow x_1 - 2 = x_2 - 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Άρα η h είναι 1 – 1. Άρα η h αντιστρέφεται.

Για $x > 2$ λύνουμε την εξίσωση $y = h(x)$ ως προς x.

Έχουμε $h(x) = y \Leftrightarrow \ell n(x-2) = y \Leftrightarrow x - 2 = e^y \Leftrightarrow x = e^y + 2$

Όμως $x > 2 \Leftrightarrow e^y + 2 > 2 \Leftrightarrow e^y > 0$, που ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον έχουμε $h(x) = y \Leftrightarrow x = h^{-1}(y)$. Συνεπώς $h^{-1}(y) = e^y + 2$. Οπότε η αντίστροφη είναι $h^{-1}(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}$.

(Εναλλακτικά, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$ «κατασκευαστικά» ή με πρόσημο πρώτης παραγώγου. Μάλιστα, λόγω μονοτονίας και συνέχειας, μπορούμε να κατασκευάσουμε και το σύνολο τιμών της h, που είναι το πεδίο ορισμού της h^{-1}.)

B3. Παίρνουμε τα παρακάτω.

$$\lim_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2^+}\left(\ell n(x-2)\cdot\frac{2\ell n(x-1)}{x-2}\right) = \ell$$

Θέτουμε $y = x - 2$. Έχουμε ότι $y \to 0^+$.

$$\ell = \lim_{y\to 0^+}\left(\ell ny\cdot\frac{2\ell n(y+1)}{y}\right)$$

$$\ell_1 = \lim_{y\to 0^+}\ell ny = -\infty$$

$$\ell_2 = \lim_{y\to 0^+}\frac{2\ell n(y+1)}{y} = \left(\frac{0}{0}\right) =_{DLH} \lim_{y\to 0^+}\frac{\left(2\ell n(y+1)\right)'}{(y)'} = \lim_{y\to 0^+}\frac{\frac{2}{y+1}}{1} =$$

$$= \lim_{y\to 0^+}\frac{2}{y+1} = 2$$

Συνεπώς $\ell = \ell_1\cdot\ell_2 = -\infty\cdot 2 = -\infty$.

Θέμα Γ

Γ1. i) Εφόσον η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, παίρνουμε τα ακόλουθα.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2+1} \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}(\kappa x) = \begin{cases} +\infty, \text{για } \kappa > 0 \\ -\infty, \text{για } \kappa < 0 \\ 0, \text{για } \kappa = 0 \end{cases}$$

Όμως εφόσον $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1} \in \mathbb{R}$ παίρνουμε ότι $\kappa = 0$.

ii) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή.

Για $\kappa = 0$ είναι $f(x) = \frac{\mu x}{x^2+1}$.

$$f'(x) = \left(\frac{\mu x}{x^2+1}\right)' = \frac{(\mu x)'(x^2+1) - (x^2+1)'\cdot\mu x}{(x^2+1)^2} = \frac{\mu(x^2+1) - 2x\cdot\mu x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{\mu x^2 + \mu - 2\mu x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-\mu x^2 + \mu}{(x^2+1)^2}$$

Εφόσον η $y = x$ εφάπτεται της C_f στην αρχή των αξόνων, παίρνουμε $f'(0) = 1$.

Άρα $\dfrac{-\mu \cdot 0^2 + \mu}{(0^2+1)^2} = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$.

Γ2. i) Για $\kappa = 0$ και $\mu = 1$ παίρνουμε τα παρακάτω.

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}, \qquad f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = \frac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
f		↘		↗		↘	
			Τ.Ε.		Τ.Μ.		

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = -1$ το $f(-1) = \dfrac{-1}{(-1)^2+1} = -\dfrac{1}{2}$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 1$ το $f(1) = \dfrac{1}{1^2+1} = \dfrac{1}{2}$.

ii) Παίρνουμε τα παρακάτω.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2+1} = -\frac{1}{2}, \qquad f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Εφόσον η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, -1]$, παίρνουμε τα παρακάτω.

$$f(\Delta_1) = \left[f(-1), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$$

Εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $\Delta_2 = [-1, 1]$, παίρνουμε τα παρακάτω.

$$f(\Delta_2) = [f(-1), f(1)] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Εφόσον η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $\Delta_3 = [1, +\infty)$, παίρνουμε τα παρακάτω.

$$f(\Delta_3) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right] = \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

Άρα $f(\mathbb{R}) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Τώρα, θα βρούμε το πλήθος των ριζών της παρακάτω εξίσωσης για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$$

1η περίπτωση

$$\frac{1}{2} + \alpha^2 \notin f(\mathbb{R})$$

Τότε παίρνουμε τα παρακάτω.

$$\frac{1}{2} + \alpha^2 \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \alpha^2 \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \alpha^2 < -\frac{1}{2} \text{ ή } \frac{1}{2} + \alpha^2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\alpha^2 < -1 \text{ ή } 1 + 2\alpha^2 > 1 \Leftrightarrow 2\alpha^2 < -2 \text{ ή } 2\alpha^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 < -1 \text{ ή } \alpha^2 > 0$$

Η ανίσωση $\alpha^2 < -1$ είναι αδύνατη ως προς α. Συνεπώς πρέπει $\alpha^2 > 0$. Ισοδύναμα πρέπει να ισχύει ότι $\alpha \neq 0$.

Όμως στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ είναι αδύνατη, διότι $\frac{1}{2} + \alpha^2 \notin f(\mathbb{R})$. Άρα για $\alpha \neq 0$ η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ έχει πλήθος ριζών 0.

2η περίπτωση

$$\frac{1}{2} + \alpha^2 \in f(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \alpha^2 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + \alpha^2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \alpha^2 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

Συνεπώς παίρνουμε ότι $\alpha = 0$.

$$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Συνεπώς για $\alpha = 0$, το πλήθος των ριζών της εν λόγω εξίσωσης είναι 1.

Γ3. i) Έστω $\nu \in \mathbb{N}$. Παίρνουμε τα παρακάτω.

$$I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \left(\frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} + \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} + x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1}dx = \int_0^1 x^{2\nu+1}\,dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1^{2\nu+2}}{2\nu+2} - \frac{0^{2\nu+2}}{2\nu+2} = \frac{1}{2\nu+2}$$

ii) Παίρνουμε τα παρακάτω.

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$$

Θέτω $u = x^2 + 1$. Παίρνουμε $du = (x^2+1)'dx = 2xdx$. Επιπλέον παίρνουμε ότι: $u_1 = 0^2 + 1 = 1$ και $u_2 = 1^2 + 1 = 2$.

$$I_0 = \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{2u}du = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}[\ell nu]_1^2 = \frac{1}{2}(\ell n2 - \ell n1) = \frac{\ell n2}{2}$$

Τώρα χρησιμοποιούμε τον αναδρομικό τύπο που αποδείξαμε στο ερώτημα Γ3i για να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα I_1 και I_2.

$$I_0 + I_1 = \frac{1}{2 \cdot 0 + 2} \Leftrightarrow \frac{\ell n2}{2} + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1 - \ell n2}{2}$$

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{2 \cdot 1 + 2} \Leftrightarrow \frac{1 - \ell n2}{2} + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1 - \ell n2}{2} = \frac{2\ell n2 - 1}{4}$$

Θέμα Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = g(x) + x$, $x \in [-1, 0]$. Η h είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων στο $[-1, 0]$. Επιπλέον έχουμε ότι $h(-1) = g(-1) - 1 < 1 - 1 = 0$ και $h(0) = g(0) + 0 = g(0) > 0$. Συνεπώς παίρνουμε ότι $h(-1)h(0) < 0$. Άρα από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $h(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι το x_1 είναι μοναδικό.

1ος τρόπος: Με χρήση του θεωρήματος Rolle

Έστω προς άτοπον ότι υπάρχει $x_2 \neq x_1$ τέτοιο ώστε $g(x_2) + x_2 = 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 0)$ ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων στο $(-1, 0)$.

Η h είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων στο $[-1, 0]$.

Είναι $h(x_1) = h(x_2) = 0$, αφού $g(x_1) + x_1 = g(x_2) + x_2 = 0$.

Άρα από το θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει ότι $h'(x_0) = 0$. Όμως για κάθε $x \in [-1, 0]$ έχουμε τα παρακάτω.

$h'(x) = (g(x) + x)' = g'(x) + 1$

Άρα $h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow g'(x_0) + 1 = 0 \Leftrightarrow g'(x_0) = -1$. Το τελευταίο είναι άτοπο, διότι από την υπόθεση, έχουμε ότι $g'(x) \neq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς παίρνουμε ότι το x_1 είναι μοναδικό.

2ος τρόπος: Με μονοτονία

Η συνάρτηση h είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[-1, 0]$ ως πράξεις συνεχώς παραγωγισίμων συναρτήσεων στο $[-1, 0]$. Είναι $h'(x) = (g(x) + x)' = g'(x) + 1$. Παρατηρούμε ότι $h'(x) \neq 0$, καθώς ισχύει ότι $g'(x) \neq 1$, για κάθε $x \in [-1, 0]$. Εφόσον η h' είναι και συνεχής, έπεται ότι διατηρεί πρόσημο στο $[-1, 0]$. Άρα $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in [-1, 0]$ ή $h'(x) < 0$ για κάθε $x \in [-1, 0]$. Άρα η h είναι (αντιστοίχως) γνησίως αύξουσα στο $[-1, 0]$ ή γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 0]$. Εφόσον λοιπόν η h είναι γνησίως μονότονη και έχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_1 \in (-1, 0)$ (από τα προηγούμενα), έπεται ότι είναι και μοναδική.

Δ2. Έχουμε τα παρακάτω.

$$f(x) = \begin{cases} x^2(g(x) + x), x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x, x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2(g(x) + x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2(g(x) + x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} x(g(x) + x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \left(2\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\varepsilon\varphi x}{x} - \frac{\kappa x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(2\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \kappa\right) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - \kappa = 3 - \kappa$$

Εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_3 = 0$, τα παραπάνω πλευρικά όρια πρέπει να είναι ίσα. Συνεπώς πρέπει να ισχύει ότι $3 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3$.

Δ3. i) Παίρνουμε τα παρακάτω.

$$f(x)=\begin{cases} x^2(g(x)+x), x\in(-\infty,0) \\ 2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x, x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$f'(x)=(2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x)'=2\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}-3=\frac{2\sigma\upsilon\nu^3x+1-3\sigma\upsilon\nu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x}=$$

$$=\frac{2\sigma\upsilon\nu^3x-2\sigma\upsilon\nu^2x+1-\sigma\upsilon\nu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\frac{2\sigma\upsilon\nu^2x(\sigma\upsilon\nu x-1)+(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu^2x}=$$

$$=\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)(2\sigma\upsilon\nu^2x-1-\sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)(\sigma\upsilon\nu^2x-1+\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu^2x}=$$

$$=\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)[(\sigma\upsilon\nu x-1)(\sigma\upsilon\nu x+1)+\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x-1)]}{\sigma\upsilon\nu^2x}=$$

$$=\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)^2(2\sigma\upsilon\nu x+1)}{\sigma\upsilon\nu^2x}$$

Για $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ έχουμε ότι $f'(x)>0$. Για $x=0$ έχουμε ότι $f'(x)=0$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Εφόσον η f είναι συνεχής στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Άρα είναι $x\geq 0\Rightarrow f(x)\geq f(0)=0$ για κάθε $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

ii) Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η ρίζα x_2 υπάρχει.

1ος τρόπος: Με «οριακό» θεώρημα Bolzano

Θεωρούμε την παρακάτω συνάρτηση.

$$t(x)=f(x)-\frac{\pi}{3}=2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x-\frac{\pi}{3}, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Η t είναι συνεχής στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Είναι $t(0)=2\eta\mu 0+\varepsilon\varphi 0-3\cdot 0-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3}<0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}t(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x-\dfrac{\pi}{3}\right)=+\infty>0$.

Άρα $t(0)\cdot\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}t(x)<0$.

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$f(x_2) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 3f(x_2) = \pi$.

$\boxed{2^{ος}\text{ τρόπος: Με χρήση του συνόλου τιμών}}$

Έχουμε ότι $f(0) = 0$. Επιπλέον, παίρνουμε τα παρακάτω.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) = 2\cdot\frac{\pi}{2} + (+\infty) - 3\cdot\frac{\pi}{2} = +\infty$$

Για το αριστερό πλευρικό όριο της εφx, η αιτιολόγηση είναι η ακόλουθη.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\left(= \frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

Εφόσον η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, παίρνουμε τα ακόλουθα.

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[f(0), \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = [0, +\infty)$$

Εφόσον $\frac{\pi}{3} \in [0, +\infty)$, έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ώστε

$f(x_2) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 3f(x_2) = \pi$.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι η ρίζα x_2 είναι μοναδική.

Από το ερώτημα Δ3i γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{\pi}{3}$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Συμπερασματικά, η εξίσωση $3f(x) = \pi$ έχει ακριβώς μία λύση.

Δ4. i) $\boxed{1^{ος}\text{ τρόπος: Με μονοτονία}}$

Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = 0$. Για $x \in [x_1, 0)$ έχουμε $f(x) = x^2(g(x) + x)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = g(x) + x$, $x \in [x_1, 0]$. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1, 0]$ ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων στο $[x_1, 0]$. Μάλιστα παίρνουμε ότι $\varphi'(x) = (g(x) + x)' = g'(x) + 1$.

Εφόσον η g' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $g'(x) \neq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η φ' διατηρεί πρόσημο στο $[x_1, 0]$, άρα είτε $\varphi'(x) > 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$ ή $\varphi'(x) < 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$.

Αν $\varphi'(x) > 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$, τότε η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, 0]$. Συνεπώς παίρνουμε ότι $x \geq x_1 \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(x_1) \Rightarrow \varphi(x) \geq g(x_1) + x_1 = 0$.

Αν $\varphi'(x) < 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$, τότε η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, 0]$. Συνεπώς παίρνουμε ότι $x \le 0 \Rightarrow \varphi(x) \ge \varphi(0) = g(0) + 0 = g(0) > 0$.

Σε κάθε περίπτωση $\varphi(x) \ge 0 \Rightarrow x^2\varphi(x) \ge 0 \Rightarrow x^2(g(x) + x) \ge 0$.

Από τα παραπάνω, παίρνουμε ότι $f(x) \ge 0$, για κάθε $x \in [x_1, 0]$.

2ος τρόπος: Με συνέχεια και διατήρηση προσήμου

Για κάθε $x \in [x_1, 0]$ είναι $f(x) = x^2(g(x) + x)$. Έστω $\varphi(x) = g(x) + x$, $x \in [x_1, 0]$. Έχουμε ότι $\varphi(x_1) = 0$. Τώρα, στο διάστημα $(x_1, 0]$ έχουμε ότι $\varphi(x) \neq 0$ και ότι η φ είναι συνεχής στο $(x_1, 0]$. Άρα η φ διατηρεί πρόσημο στο $(x_1, 0]$. Όμως έχουμε ότι $\varphi(0) = g(0) > 0$. Άρα $\varphi(x) > 0$, για κάθε $x \in (x_1, 0]$.

Έπεται ότι $x^2(g(x) + x) \ge 0$, για κάθε $x \in [x_1, 0]$, συνεπώς παίρνουμε ότι $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$. Μάλιστα, η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_1$ ή $x = 0$.

ii) Αρχικά, από τα προηγούμενα ερωτήματα, παίρνουμε ότι $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$ και για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, άρα $|f(x)| = f(x)$ σε αυτά τα διαστήματα.

$$E(\Omega_1) = E(\Omega_2) \Leftrightarrow \int_{x_1}^{0} |f(x)|\,dx = \int_{0}^{f(x_2)} |f(x)|\,dx \Leftrightarrow \int_{x_1}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^{0} x^2(g(x) + x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x)\,dx$$

$$E(\Omega_2) = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x)\,dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ell n(\sigma\upsilon\nu x) - \frac{3x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right) - \ell n\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 + 2\sigma\upsilon\nu 0 + \ell n(\sigma\upsilon\nu 0) + \frac{3 \cdot 0^2}{2} =$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{2} - \ell n\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi^2}{9} + 2 \cdot 1 = 1 + \ell n 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

$$E(\Omega_1) = \int_{x_1}^{0} x^2(g(x) + x)\,dx = \int_{x_1}^{0} \left(\frac{x^3}{3}\right)'(g(x) + x)dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}(g(x) + x)\right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3}(g(x) + x)'\,dx =$$

$$= \frac{0^3}{3}(g(0) + 0) - \frac{x_1^3}{3}(g(x_1) + x_1) - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3}(g'(x) + 1)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3(g'(x)+1)\,dx = -\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx - \frac{1}{3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0} = -\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx - \frac{1}{3}\cdot\frac{0^4}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x_1^4}{4} =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx + \frac{x_1^4}{12}$$

Συνεπώς παίρνουμε τα παρακάτω.

$$E(\Omega_1) = E(\Omega_2) \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx + \frac{x_1^4}{12} = 1 + \ell n2 - \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx = -\frac{x_1^4}{12} - \frac{\pi^2}{6} + \ell n2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ell n2 - 3$$

Αιτιολόγηση για το ολοκλήρωμα της εφx

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (-\ell n|\sigma\upsilon\nu x|)'\,dx =$$

$$= [-\ell n|\sigma\upsilon\nu x|]_0^{\frac{\pi}{3}} = [-\ell n(\sigma\upsilon\nu x)]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\ell n\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + \ell n(\sigma\upsilon\nu 0) =$$

$$= -\ell n\left(\frac{1}{2}\right) + \ell n1 = \ell n2$$