ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2016

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ

ΛΕΩΦΟΡΟΣ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ 445 & ΟΡΦΕΩΣ 1, Ν. ΗΡΑΚΛΕΙΟ
ΕΞΟΔΟΣ 9 ΑΤΤΙΚΗΣ ΟΔΟΥ Τ: 213 04 15 334
www.enavsma.edu.gr email:info@enavsma.edu.gr

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2016

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν Α και Α′ είναι δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι για τις πιθανότητές τους ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A) \ .$$

(Μονάδες 7)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Α1:

Σχολικό βιβλίο σελ. 150

Α2: Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

(Μονάδες 4)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Α2:

Σχολικό βιβλίο σελ. 87

Α3: Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 0xA

(Μονάδες 4)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Α3:

Σχολικό βιβλίο σελ. 14

Α4: Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, τότε για τις πιθανότητές τους ισχύει $P(A) \leq P(B)$.

β) Ο σταθμισμένος αριθμητικός μέσος ή σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς.

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες, τότε ισχύει ότι:

$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

δ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

ε) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

(Μονάδες 10)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Α4:

α) Σωστό

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1, x \in R$.

Β1: Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

(Μονάδες 9)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Β1:

Είναι : $f'(x) = x^2 - 5x + 6, x \in R$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=3$ ή $x=2$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f		↗		↗		↗	

- Η f είναι γνησίως αύξουσα $(-\infty,2]$ και στο $[3, +\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, 3]$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=2$, το $f(2)=\dfrac{11}{3}$
- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2=3$, το $f(3)=\dfrac{7}{2}$

Β2: Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0,f(0))$

(Μονάδες 8)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Β2:

Η εφαπτομένη έχει (ε): $y=\alpha x+\beta$ (1). Ισχύει ότι $\alpha=f'(0)=6$, οπότε (ε): $y=6x+\beta$.

Όμως $A\in(\varepsilon)$, άρα : $f(0)=6\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=-1$. Άρα : (ε) $y=6x-1$.

Β3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f'(x)-12}{x+1}$

(Μονάδες 8)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Β3:

Είναι : $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f'(x)-12}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f'(x)-5x+6-12}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-5x-6}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-6)(x+1)}{x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to -1}(x-6)=-7$.

ΘΕΜΑ Γ

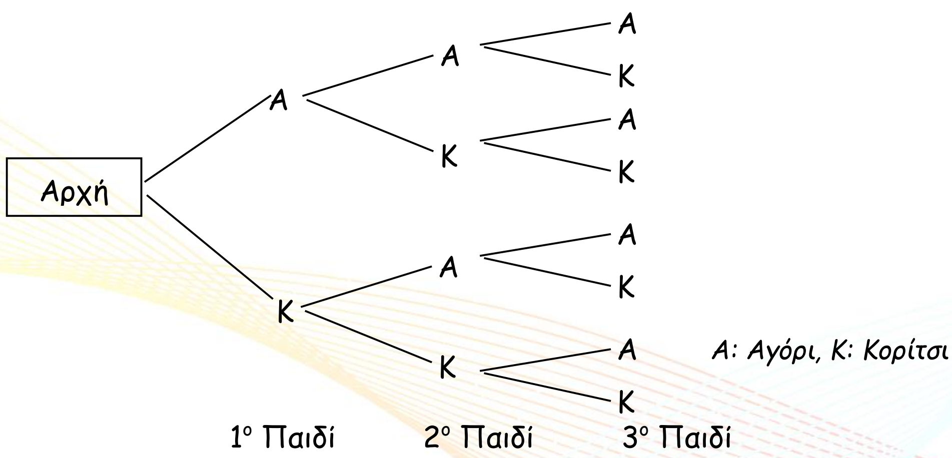
Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μία οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά της ως προς το φύλο και ως προς τη σειρά γέννησής τους.

Γ1. Να προσδιορίσετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος χρησιμοποιώντας ένα δενδροδιάγραμμα.

(Μονάδες 4)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Γ1:

Κάνουμε το δεντροδιάγραμμα του πειράματος



$\Omega = \{ΑΑΑ, ΑΑΚ, ΑΚΑ, ΑΚΚ, ΚΑΑ, ΚΑΚ, ΚΚΑ, ΚΚΚ\}$

(ii) $Β = \{ΑΑΚ, ΑΚΑ, ΑΚΚ, ΚΑΑ, ΚΑΚ, ΚΚΑ, ΚΚΚ\}$

(iii) $Γ = \{ΑΚΚ, ΚΑΚ, ΚΚΑ, ΚΚΚ\}$

Γ2. . Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

Α: «το πρώτο παιδί είναι κορίτσι»

Β: «ο αριθμός των κοριτσιών υπερβαίνει τον αριθμό των αγοριών»

Γ: «τα δύο πρώτα παιδιά είναι του ίδιου φύλου».

(Μονάδες 6)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Γ2:

Τα ενδεχόμενα με αναγραφή των στοιχείων τους είναι :

Α={ΚΑΑ, ΚΑΚ, ΚΚΑ, ΚΚΚ}

Β=|ΑΚΚ, ΚΑΚ, ΚΚΑ, ΚΚΚ}

Γ={ΑΑΑ, ΑΑΚ, ΚΚΑ, ΚΚΚ}

Γ3: Υποθέτουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

$\Delta = A \cap B$, $E = A \cup B$, $Z = \Gamma - E$

(μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

Η: «δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α,Β»

Θ: «πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα Α,Β».

(μονάδες 6)

Μονάδες 15

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Γ3:

α) τα ενδεχόμενα Δ,Ε,Ζ με αναγραφή των στοιχείων τους είναι:

$\Delta = A \cap B$={ΚΑΚ,ΚΚΑ,ΚΚΚ}

$E = A \cup B$={ΑΚΚ,ΚΑΑ,ΚΑΚ,ΚΚΑ,ΚΚΚ}

$Z = \Gamma - E$={ΑΑΑ,ΑΑΚ}

Άρα:

$N(\Delta)= 3$, $N(E)=5$, $N(Z)=2$, $N(\Omega)=8$

Από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας είναι:

$$P(E)=\frac{N(E)}{N(\Omega)} \text{ άρα } P(E)=\frac{5}{8}$$

$$P(Z)=\frac{N(Z)}{N(\Omega)} \text{ άρα } P(Z)=\frac{2}{8}=\frac{1}{2}$$

β) Το ενδεχόμενο: «δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α,Β» είναι το $(A\cup B)'$.

$$P(H)=P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)$$

άρα

$$P(H)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$$

Το ενδεχόμενο: « πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα Α,Β» είναι το $(A-B)\cup(B-A)$:

$$P(\Theta)=P((A-B)\cup(B-A)) \underset{\text{ασυμβίβαστα}}{\overset{A-B,B-A}{=}} P(A-B)+P(B-A)$$

$$= P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$= P(A\cup B)-P(A\cap B)$$

οπότε:

$$P(\Theta)=\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν ν υπολογιστές για να τρέξουν ένα πρόγραμμα, έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 ισοπλατείς κλάσεις πλάτους c, όπως στον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα v_i
[8,)		
[,)	14	
[,)		
[,)		
ΣΥΝΟΛΟ		

Δ1: Να αποδείξετε ότι **c=4**.

(Μονάδες 4)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Δ1:

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική τιμή x_i
[8,8+c)	
[8+c,8+2c)	14

Άρα

$$\frac{8+c+8+2c}{2}=14 \Leftrightarrow \frac{16+3c}{2}=14 \Leftrightarrow 16+3c=28 \Leftrightarrow 3c=12 \Leftrightarrow c=4$$

Δ2: Αν η μέση τιμή των χρόνων είναι $\bar{x}$ =14, να αποδείξετε ότι v_4=5 (μονάδες 4) και στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο (μονάδες 2).

(Μονάδες 6)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Δ2:

Ο πίνακας γίνεται:

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i * v_i$
[8, 12)	10	20	200
[12 ,16)	14	15	210
[16 , 20)	18	10	18
[20, 24)	22	v_4	22 v_4
ΣΥΝΟΛΟ		45+ v_4	590+22 v_4

Οπότε:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{4} x_i v_i \Leftrightarrow 14 = \frac{590 + 22v_4}{45 + v_4} \Leftrightarrow (45 + v_4)14 = 590 + 22v_4$$

$$\Leftrightarrow 630 + 14v_4 = 590 + 22v_4$$
$$\Leftrightarrow 40 = 8v_4$$
$$\Leftrightarrow v_4 = 5$$

Άρα ο τελικός πίνακας γίνεται

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i * v_i$
[8, 12)	10	20	200
[12 ,16)	14	15	210
[16 , 20)	18	10	18
[20, 24)	22	5	110
ΣΥΝΟΛΟ		50	700

Δ3: Αν οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες σε κάθε κλάση, να βρείτε πόσοι υπολογιστές χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά για να τρέξουν το πρόγραμμα.

(Μονάδες 5)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Δ3:

Πάνω από 9 λεπτά χρειάστηκαν

$$\frac{3}{4}v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = \frac{3}{4}20 + 15 + 10 + 5 = 45 \text{ υπολογιστές}$$

Δ4: Να αποδείξετε ότι η τυπική απόκλιση των χρόνων είναι s=4 και να εξετάσετε αν το δείγμα των χρόνων είναι ομοιογενές.

(Μονάδες 6)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Δ4:

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
[8, 12)	10	20	-4	16	320
[12 ,16)	14	15	0	0	0
[16 , 20)	18	10	4	16	160
[20, 24)	22	5	8	64	320
ΣΥΝΟΛΟ		50		564	800

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \frac{800}{50} = 16$$

Άρα s=4

και

$$CV_x = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{4}{14} \cong 0{,}28 > 0{,}1 \text{ ή } (28\% > 10\%)$$

Άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές

Δ5: Αντικαθιστούμε τον επεξεργαστή κάθε υπολογιστή με έναν ταχύτερο και βρίσκουμε ότι κάθε υπολογιστής τρέχει τώρα το πρόγραμμα στο 80% του χρόνου που χρειαζόταν πριν. Να εξετάσετε ως προς την ομοιογένεια το καινούργιο δείγμα χρόνων.

(Μονάδες 4)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Δ5:

Έχουμε

x_i : αρχικός χρόνος

y_i : τελικός χρόνος

Συνδέονται με την σχέση

$$y_i = 0{,}8x_i, i \in \{1{,}2{,}3....50\}$$
$$\bar{y} = 0{,}8\bar{x}$$
$$S_y = |0{,}8| S_x$$
$$CV_y = \frac{S_y}{|\bar{y}|} = \frac{0{,}8s_x}{0{,}8\bar{x}} = \frac{s_x}{\bar{x}} = CV_x$$

Το CV παραμένει αμετάβλητο