ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2017 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

19/06/2017

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΔΗΜΟΠΟΥΛΟΣ ΔΗΜΟΣ

ΘΕΜΑ Α.

Α1. Απόδειξη (Σχολικό βιβλίο σελ. 41)

Α2. Ορισμός (Σχολικό βιβλίο σελ. 14)

Α3. Ορισμός (Σχολικό βιβλίο σελ. 72)

Α4.

(α) Σωστό

(β) Λάθος

(γ) Λάθος

(δ) Σωστό

(ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β.

Β1.

α) Για την εύρεση της μέσης τιμής κατασκευάζουμε βοηθητική στήλη με τα γινόμενα $x_i \cdot \nu_i$ όπως παρακάτω:

x_i	ν_i	$x_i \cdot \nu_i$
1	2	2
3	3	9
5	4	20
9	1	9
Σύνολο	10	40

Οπότε $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \nu_i}{\nu} = \dfrac{40}{10} = 4$

β) Είναι $\nu = 10$ (άρτιος αριθμός), οπότε η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

Οπότε, $\delta = \dfrac{5^{\eta}\ \text{παρατήρηση} + 6^{\eta}\ \text{παρατήρηση}}{2}$.

Κατασκευάζουμε στον αρχικό πίνακα την στήλη της αθροιστικής συχνότητας.

x_i	ν_i	N_i
1	2	2
3	3	5
5	4	9
9	1	10
Σύνολο	10	

Προκύπτει ότι η 5η παρατήρηση είναι ο αριθμός 3 και η 6η παρατήρηση είναι ο αριθμός 5. Οπότε, $\delta = \frac{3+5}{2} = 4$.

γ) Για την εύρεση της διακύμανσης κατασκευάζουμε στον αρχικό πίνακα βοηθητικές στήλες.

x_i	ν_i	$\left(\chi_i - \bar{x}\right)^2$	$\left(\chi_i - \bar{x}\right)^2 \cdot \nu_i$
1	2	9	18
3	3	1	3
5	4	1	4
9	1	25	25
Σύνολο	10		50

Οπότε, $s^2 = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{4} \left(\chi_i - \bar{x}\right)^2 \cdot \nu_i \Leftrightarrow s^2 = \frac{50}{10} \Leftrightarrow s^2 = 5$

Β2. Για να εξετάσουμε αν το δείγμα είναι ομοιογενές αρκεί να βρούμε τον συντελεστή μεταβολής CV.

Είναι $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{100} > \frac{10}{100}$. Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = 2x - 1$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 2x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow 2x-1<0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	↘		↗

Στο διάστημα $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και στο

διάστημα $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0=\frac{1}{2}$, το $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$.

Γ2. Το σημείο $A(2,f(2))$ είναι το $A(2,3)$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο A είναι ίσος με $\lambda=f'(2)=3$.

Έστω $(\varepsilon): y=\lambda\chi+\beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο A, τότε εφόσον το σημείο A ανήκει στην (ε) οι συντεταγμένες του θα την επαληθεύουν.

Οπότε $3=3\cdot 2+\beta \Leftrightarrow \beta=-3$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $(\varepsilon): y=3\chi-3$

Γ3. Για το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα $\chi'\chi$, λύνουμε την εξίσωση $y=0 \Leftrightarrow 3x-3=0 \Leftrightarrow x=1$. Επομένως η (ε) τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ στο σημείο $K(1,0)$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα $y'y$ αντικαθιστούμε $x=0$ στην εξίσωση της (ε), οπότε $y=-3$ και άρα το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα $y'y$ είναι το $\Lambda(0,-3)$.

Γ4.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

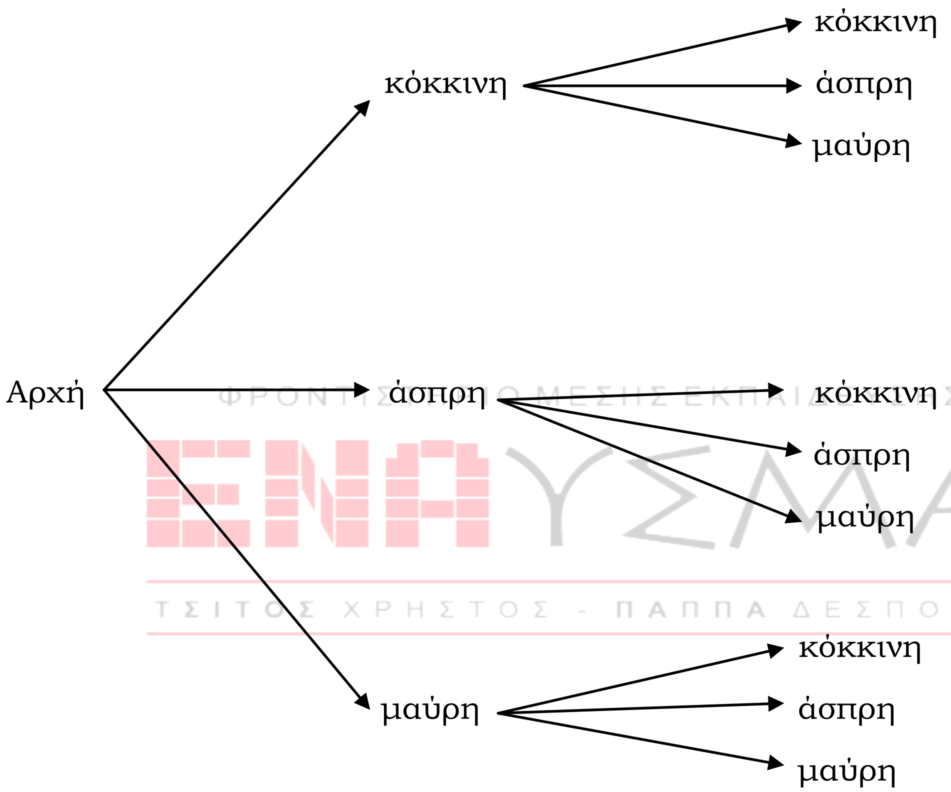
ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. Ορίζουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα.

Α: η μπάλα είναι άσπρη

Κ: η μπάλα είναι κόκκινη

Μ: η μπάλα είναι μαύρη



Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι
$\Omega=\{AA, AM, AK, MA, MM, MK, KA, KM, KK\}$.

Δ2. Τα ενδεχόμενα Α και Β με αναγραφή των στοιχείων τους είναι τα παρακάτω $A=\{AM, MM, KM\}$ και $B=\{AK, AM, MA, MK, KA, KM\}$.

Δ3. Έχουμε $N(\Omega)=9,\ N(A)=3,\ N(B)=6$. Υπολογίζουμε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Α και Β.

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

Το ενδεχόμενο $A\cap B$ αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των ενδεχομένων Α και Β. Επομένως $A\cap B=\{AM, KM\}$, με $N(A\cap B)=2$.

Επομένως $P(A\cap B)=\dfrac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\dfrac{2}{9}$

Για την πιθανότητα του ενδεχομένου A' έχουμε:
$P(A')=1-P(A)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$.

Για την πιθανότητα του ενδεχομένου $A-B$ έχουμε:
$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$$

Για την πιθανότητα του ενδεχομένου $B-A$ έχουμε:
$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{3}-\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$$

Δ4. Εφόσον τα ενδεχόμενα Α, Β και Β, Γ είναι ασυμβίβαστα, το $\Gamma\subseteq(A\cup B)'$. Άρα $P(\Gamma)\le P\left[(A\cup B)'\right]$. Επομένως η μεγαλύτερη τιμή του $P(\Gamma)$ είναι όταν:

$$P(\Gamma)=P\left[(A\cup B)'\right]\Leftrightarrow P(\Gamma)=1-P(A\cup B)\Leftrightarrow P(\Gamma)=1-\big(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\big)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(\Gamma)=1-\left(\frac{3}{9}+\frac{6}{9}-\frac{2}{9}\right)\Leftrightarrow P(\Gamma)=\frac{2}{9}$$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

Τα σημερινά θέματα είναι σαφή και καλύπτουν μεγάλο μέρος της ύλης.

Κρίνονται εύκολα και χωρίς ιδιαίτερες παγίδες.