ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2017 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

09/06/2017

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ

ΘΕΜΑ Α.

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Απάντηση

Σχολικό βιβλίο σελίδα 135.

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_0, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. »

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.(μονάδες 3)

Μονάδες 4

Απάντηση

α. Ψ

β. Θα αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό παραθέτοντας ένα αντιπαράδειγμα.

Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|=\begin{cases} x\ , & x\geq 0 \\ -x\ , & x<0 \end{cases}$.

Ισχύει ότι $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}=0$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Έπειτα έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1 \ \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 0^-} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = -1$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Α3. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

Μονάδες 4

Απάντηση

Σχολικό βιβλίο σελίδα 73.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f: R→R και g: R→R, αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = 0$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η $g\circ f$ ορίζεται αν $f(A)\cap B \neq \varnothing$.

γ) Για κάθε συνάρτηση f: R→R που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε x∈R.

δ) Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim_{x\to-\infty}\alpha^x = +\infty$.

ε) Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσου μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Απάντηση

(α) Λάθος

(β) Σωστό

(γ) Λάθος

(δ) Σωστό

(ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x,\ x>0$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x},\ x\neq 1$.

Β1. Να προσδιορίσετε την $f\circ g$.

Μονάδες 5

Απάντηση

Το πεδίο ορισμού της $f\circ g$ είναι:

$$D_{f\circ g}=\{x\in D_g\,/\,g(x)\in D_f\}=\left\{x\neq 1\ \text{ και }\ \frac{x}{1-x}>0\right\}$$

Έχουμε: $\dfrac{x}{1-x}>0 \Leftrightarrow x(1-x)>0 \Leftrightarrow x\in(0,1)$

Συνεπώς $D_{f\circ g}=(0,1)$.

Είναι: $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right),\ x\in(0,1)$.

Β2. Αν $h(x)=(f\circ g)(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right),\ x\in(0,1)$, να αποδείξετε ότι

η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 6

Απάντηση

Για $x\in(0,1)$ έχουμε: $h(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)=\ln x-\ln(1-x)$.

Έστω $x_1, x_2\in(0,1)$ με: $x_1<x_2 \overset{\ln\uparrow}{\Leftrightarrow} \ln x_1<\ln x_2 \quad (1)$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2$$

$$\overset{\ln\uparrow}{\Leftrightarrow} \ln(1-x_1) > \ln(1-x_2) \Leftrightarrow -\ln(1-x_1) < -\ln(1-x_2) \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\ln x_1 - \ln(1-x_1) < \ln x_2 - \ln(1-x_2) \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2).$$

Συνεπώς η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο στο (0,1), οπότε και ''1-1'' , άρα ορίζεται η αντίστροφη της h^{-1}.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο (0, 1) ως πράξεις – σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και γνησίως αύξουσα, οπότε το σύνολο τιμών της είναι:

$$h((0,1)) = \left(\lim_{x \to 0^+} h(x),\ \lim_{x \to 1^-} h(x) \right)$$

Είναι: $\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$

Έχουμε: $x < 1 \Leftrightarrow 1 - x > 0$. Οπότε $\lim_{x \to 1^-}(1-x) = 0$

Άρα $\lim_{x \to 1^-} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = +\infty$.

Είναι: $\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$

Έχουμε: $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1-x} = 0$. Άρα $\lim_{x \to 0^+} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = -\infty$.

Άρα το σύνολο τομών της h είναι το (–∞, +∞) = R. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της h^{-1} είναι το R. Για τον τύπο της h^{-1} έχουμε:

$$h(x) = y \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = y \Leftrightarrow e^y = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow (1-x)e^y = x \Leftrightarrow$$

$$e^y - xe^y = x \Leftrightarrow e^y = xe^y + x \Leftrightarrow e^y = x(1+e^y) \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{1+e^y}$$

Συνεπώς $h^{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, $x \in R$.

Β3. Αν $\phi(x) = h^{-1}(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$, $x \in R$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Απάντηση

Είναι: $\phi'(x) = \left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)' = \dfrac{e^x(e^x+1) - e^x e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$

Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο R. Τότε η φ δεν έχει ακρότατα στο R.

Έπειτα έχουμε:

$$\phi''(x) = \left(\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)'' = \frac{e^x(e^x+1)^2 - 2(e^x+1)(e^x+1)'e^x}{(e^x+1)^4} = \frac{e^x(e^x+1)^2 + 2e^{2x}(e^x+1)}{(e^x+1)^4}$$

$$= \frac{e^x(e^x+1)(e^x+1-2e^x)}{(e^x+1)^4} = \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

Τότε: $\phi''(x) = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3} = 0 \Leftrightarrow 1-e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Είναι: $\phi''(x) > 0 \Leftrightarrow 1-e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
φ''(x)	+	0	−
φ(x)		σ.κ	

Οπότε:

Η φ είναι κυρτή στο (−∞, 0] και κοίλη στο [0, +∞). Έχει σημείο καμπής το Α $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

Β4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό).

Μονάδες 7

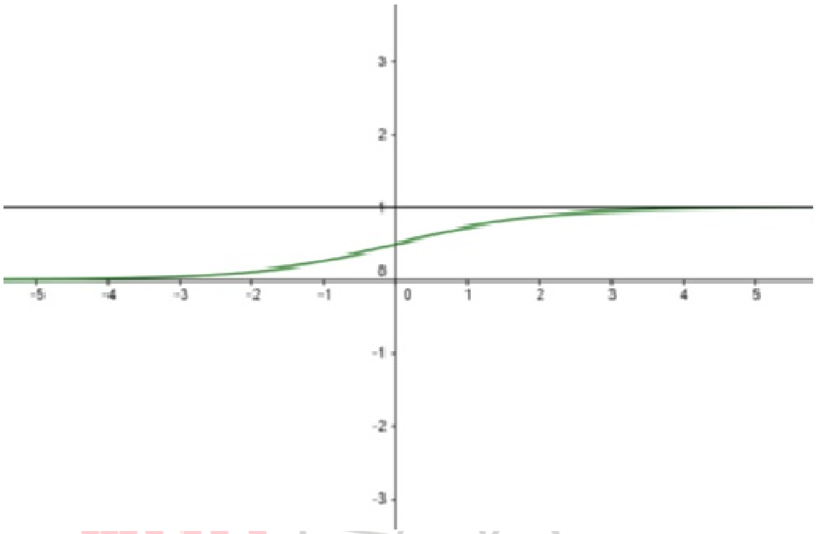
Απάντηση

Είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty}\phi(x)=0$. Άρα η φ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y=0$ στο $-\infty$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)\underset{D.L.H}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$

Άρα η φ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y=1$ στο $+\infty$.

Η γραφική παράσταση της φ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ Γ.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\eta\mu x$, $x\in[0,\pi]$ και το σημείο $A[\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}]$

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτομένες (ε_1), (ε_2) της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το Α, τις οποίες και να βρείτε.

Μονάδες 8

Απάντηση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στον $[0, \pi]$ με $f'(x)=-\sigma\upsilon\nu x$.

Έστω $(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f και (ε): $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, η εφαπτομένη στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

Έχουμε: $y - \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0(x - x_0)$.

Όμως το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)\in(\varepsilon)$. Άρα έχουμε: $-\frac{\pi}{2}+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)$

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x)=-\frac{\pi}{2}+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $x\in[0,\pi]$.

Η g είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sigma\upsilon\nu x=-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

Είναι: $g(0)=g(\pi)=0$, προφανείς ρίζες.

Είναι: $g'(x)=0\Leftrightarrow \eta\mu x=0$ ή $x=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=0$ ή $x=\pi$ ή $x=\frac{\pi}{2}$,

εφόσον $x\in[0,\pi]$.

Είναι $\eta\mu x>0$, για κάθε $x\in(0,\pi)$. Οπότε:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
		T.E	

Η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}-1\right)$. Είναι $g'(x)<0$, για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $g'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο για κάθε $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

Δηλαδή για $0<x<\frac{\pi}{2}\underset{g\downarrow}{\Leftrightarrow}g(x)<g(0)\Leftrightarrow g(x)<0$

και για $\frac{\pi}{2}<x<\pi\underset{g\uparrow}{\Leftrightarrow}g(x)<g(\pi)\Leftrightarrow g(x)<0$

Άρα η g έχει μοναδικές ρίζες τις $x=0$ και $x=\pi$.

Οι εφαπτομένες της στα σημεία αυτά είναι:

Για $x_0 = 0$: $f(0) = 0$ και $f'(0) = -1$

Οπότε: (ε_1): $y - 0 = -1(x - 0) \Leftrightarrow y = -x$

Για $x_0 = \pi$: $f(\pi) = 0$ και $f'(\pi) = 1$

Οπότε: (ε_2): $y = x - \pi$

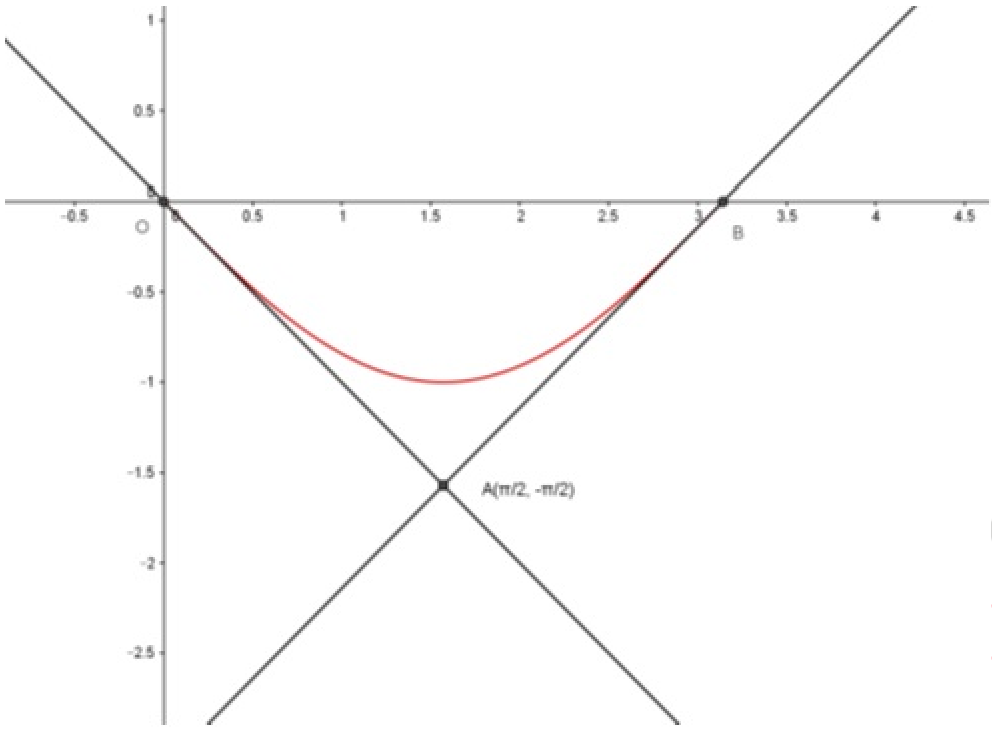
Γ2. Αν (ε_1): $y = -x$ και (ε_2): $y = x - \pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος Γ1 τότε να σχεδιάσετε τις (ε_1), (ε_2) και τη γραφική παράσταση της f και να αποδείξετε ότι $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{\pi^2}{8} - 1$, όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1), (ε_2), και
- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα x′x.

Μονάδες 6

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

<u>Απάντηση</u>



Το κοινό σημείο των (ε_1), (ε_2) είναι: $-x = x - \pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι: $(OAB) = \dfrac{\pi^2}{4}$

Είναι: $E_2 = \int_0^{\pi} |-\eta\mu x| dx = \int_0^{\pi} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = -\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = 1 + 1 = 2$

Οπότε: $E_1 = (OAB) - E_2 = \dfrac{\pi^2}{4} - 2$

Δηλαδή: $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{2} = \dfrac{\pi^2 - 8}{8} = \dfrac{\pi^2}{8} - 1$

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi}$.

Μονάδες 4

Απάντηση

Είναι $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi} = \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{-\eta\mu x + x}{-\eta\mu x - x + \pi}$

Έχουμε: $\lim\limits_{x \to \pi}(-\eta\mu x + \pi) = \pi \ (>0)$ και $\lim\limits_{x \to \pi}(-\eta\mu x - x + \pi) = 0$.

Όμως $f''(x) = \eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$, άρα η f είναι κυρτή στο $[0, \pi]$.

Συνεπώς η C_f, θα βρίσκεται συνεχώς πάνω από την εφαπτομένη της, εκτός του σημείου επαφής της, το $x = \pi$.

Άρα $f(x) \geq x - \pi \Leftrightarrow f(x) - x + \pi \geq 0$ και για $x \neq \pi$, $f(x) - x + \pi > 0$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1}{-\eta\mu x - x + \pi} = +\infty$

Συνολικά έχουμε: $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{-\eta\mu x + x}{-\eta\mu x - x + \pi} = (+\infty) \cdot \pi = +\infty$

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \dfrac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi$.

Μονάδες 7

Απάντηση

Από Γ3 η f είναι κυρτή στο $[0,\pi]$, οπότε:

$$f(x)\ge x-\pi \overset{x\in[1,e]}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)}{x}\ge 1-\frac{\pi}{x}$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > \int_1^e\left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx \Rightarrow$$

Άρα: $\displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > [x-\pi\ln x]_1^e \Rightarrow$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} > e-\pi-1$$

ΘΕΜΑ Δ.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,0)\\ e^x\eta\mu x, & x\in[0,\pi]\end{cases}$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [-1, π] και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Μονάδες 5

Απάντηση

Είναι $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$, $x\in[-1,0)$ η οποία είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt[3]{x^4}=0$.

Είναι $f(x)=e^x\eta\mu x$, $x\in(0,\pi]$ η οποία είναι συνεχής στο $(0,\pi]$ ως γινόμενο συνεχών . Έχουμε $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^x\eta\mu x=0=f(0)$.

Όποτε, εφόσον, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0$, η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ και συνεπώς η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,\pi]$.

Η f είναι παρ/μη στο [-1,0) ως σύνθεση παρ/μων με

$f'(x)=(x^{\frac{4}{3}})'=-\frac{4}{3}(-x)^{\frac{4}{3}-1}=-\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}=-\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}$

Η f είναι παρ/μη στο $(0,\pi]$ ως γινόμενο παρ/μων $f'(x)=e^x\eta\mu x-e^x\sigma\upsilon\nu x$.

Εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα της f στο $x_0=0$. Είναι για x<0:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|^{\frac{4}{3}}}{x}=-\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^{\frac{4}{3}}}{-x}=-\lim_{x\to 0^-}(-x)^{\frac{4}{3}-1}=-\lim_{x\to 0^-}(-x)^{\frac{1}{3}}=0$$

Για x>0: $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x ημx}{x}=\lim_{x\to 0^+}e^x\frac{ημx}{x}=1*1=1$

Επομένως δεν υπάρχει το $f'(0)$ άρα η f δεν είναι παρ/μη στο $x_0=0$.

Επίσης, για $x\in(0,\pi]$, $f'=0 \Leftrightarrow e^x(ημx+συνx)=0 \Leftrightarrow e^x=0$ ή ημx+συνx=0

Είναι $e^x=0$, αδύνατη και συνx= –ημx$\Leftrightarrow$

συνx=συν$(\frac{\pi}{2}+x)$

$$\Leftrightarrow x=\begin{cases}2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}+x\\ 2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}-x\end{cases},\quad \kappa\in Z\Leftrightarrow x=2\kappa\pi\quad (\text{αδύνατη}\quad ή\quad x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}-x$$

$$\Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4}.$$

Όμως $x\in(0,\pi]$, άρα $0<-\frac{\pi}{4}\le\pi\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}<\kappa\pi\le\frac{5\pi}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{4}<\kappa<\frac{5}{4}$. Όμως $\kappa\in Z$ άρα κ=1. Δηλαδή x=π–$\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

Συνολικά η f έχει δύο κρίσιμα σημεία, x=0 και x=$\frac{3\pi}{4}$.

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

<u>Απάντηση</u>

Είναι για κάθε $x\in[-1,0)$, $f'(x)=-\frac{3}{4}(-x)^{\frac{1}{3}}<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [-1,0)

Είναι για κάθε $x\in(0,\pi]$, $f'(x)=e^x(ημx+συνx)f'(x)=0\Leftrightarrow e^x(ημx+συνx)=0$ $\overset{e^x>0,\text{για κάθε } x\in R}{\Leftrightarrow}$ ημx+συνx=0$\Leftrightarrow$x=$\frac{3\pi}{4}$, από ερώτημα Δ1.

Είναι $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x(ημx+συνx)>0 \Leftrightarrow ημx+συνx>0 \Leftrightarrow ημx>-συνx$

$\underset{ημx>0 \text{ για καθε } x\in(0,\pi)}{\Leftrightarrow} σφx>σφ(\frac{3\pi}{4}) \overset{σφx\downarrow}{\Leftrightarrow} x<\frac{3\pi}{4})$

x	-1		0		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)=-\frac{3\pi}{4}(-x)^{\frac{1}{3}}$		$-$					
$f'(x)=e^x(ημx+συνx)$				$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$		$+$	0	$-$	
f		↘		↗		↘	

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, \frac{3\pi}{4}]$, γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα (-1,0) και $[\frac{3\pi}{4},\pi]$. παρουσιάζει τοπικά μέγιστα τα $f(\frac{3\pi}{4})e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(-1)=1$ και τοπικά ελάχιστα τα $f(0)=0$ και $f(\pi)=0$.

Το ολικό ελάχιστο είναι το μικρότερο ακρότατο, δηλαδή το 0 και ολικό μέγιστο το μεγαλύτερο, δηλαδή το $e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}$, αφού $1<e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2<e^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow 4<e^{\frac{3\pi}{2}}2 \Leftrightarrow 2<e^{\frac{3\pi}{2}}$, που ισχύει αφού $\frac{3\pi}{2}>1 \Leftrightarrow e^{\frac{3p}{2}}>e>2$.

Για το σύνολο τιμών έχουμε, εφόσον η f είναι συνεχής,

$$f([-1,0)=(\lim_{x\to0^+}f(x),f(-1)]=(0,1)$$

$$f([\frac{3\pi}{4},\pi]=[f(\pi),f(\frac{3\pi}{4})]=[0,e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f([0,\frac{3\pi}{4}])=[f(0),f(\frac{3\pi}{4})]=[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}]$$

Άρα $f(A)=[0, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}]$

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τη γραφική παράσταση της g, με $g(x)=e^{5x}$, $x\in R$, τον άξονα y′y και την ευθεία $x=\pi$.

Μονάδες 6

Απάντηση

$$E=\int_0^{\pi}\left|e^x\eta\mu x-e^{5x}\right|dx=\int_0^{\pi}e^x\left|\eta\mu x-e^{4x}\right|dx$$

Είναι $|\eta\mu x|\le|x|$ και για $x\ge0$ έχουμε $\eta\mu x\le x$ (1). Επίσης ισχύει $e^x\ge x+1$, για κάθε $x\in R$, άρα $e^{4x}\ge4x+1\Leftrightarrow-e^{4x}\le-4x-1$ (2). Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1),(2) έχουμε:

$$\eta\mu x-e^{4x}\le-4x-1+x\Leftrightarrow\eta\mu x-e^{4x}\le-3x-1<0$$

Άρα: $\left|\eta\mu x-e^{4x}\right|=e^{4x}-\eta\mu x$.

Οπότε :

$$E=\int_0^{\pi}e^x(e^{4x}-\eta\mu x)dx=\int_0^{\pi}e^{5x}dx-\int_0^{\pi}e^x\eta\mu xdx$$

Είναι: $\int_0^{\pi}e^{5x}dx=[\frac{1}{5}e^{5x}]_0^{\pi}=\frac{e^{5\pi}}{5}-\frac{1}{5}$

Θέτω

$$I=\int_0^{\pi}e^x\eta\mu xdx=\int_0^{\pi}(e^x)'\eta\mu xdx=[e^x\eta\mu x]_0^{\pi}$$
$$-\int_0^{\pi}e^x\sigma\upsilon\nu xdx=-\int_0^{\pi}(e^x)'\sigma\upsilon\nu xdx=-[e^x\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\eta\mu xdx=e^{\pi}+1-I.$$

Άρα $I=e^{\pi}+1-I\Leftrightarrow2I=e^{\pi}+1\Leftrightarrow I=\frac{e^{\pi}+1}{2}$ τ.μ

Τέλος , $E(\Omega)=-\frac{e^{\pi}+1}{2}+\frac{e^{5\pi}}{5}-\frac{1}{5}$

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}$

Μονάδες 8

Απάντηση

Είναι: $16e^{\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x)-3\pi)^2=8\sqrt{2} \Leftrightarrow 16f(x)-(4x-3\pi)^2=8e^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$$f(x)=\frac{(4x-3\pi)^2}{16}+\frac{e^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow f9x)=(x-\frac{3\pi}{2})^2+f(\frac{3\pi}{4}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)-f(\frac{3\pi}{4})=x-\frac{3\pi}{4})^2$$

Όμως από Δ2 η f παρουσιάζει μέγιστο το $f(\frac{3\pi}{4})$.

Άρα: $f(x)\leq f(\frac{3\pi}{4}) \Leftrightarrow f(x)-f(\frac{3\pi}{4})\leq 0$ για $x\in[-1,0]$

Όμως $(x-\frac{3\pi}{4})^2\geq 0$, για κάθε $x\in R$ συνεπώς η ισότητα ισχύει μόνο για $f(x)-f(\frac{3\pi}{4})=0$ και $(x-\frac{3\pi}{4})^2=0$

Άρα $x-\frac{3\pi}{4}=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

Τα σημερινά θέματα είναι **σαφή**, καλύπτουν αρκετό μέρος της ύλης και είναι **απαιτητικά.** Ειδικότερα:

- Απαιτούν γνώσεις προηγούμενων τάξεων, ιδίως της ***Τριγωνομετρίας.***
- Είναι μεγάλα σε έκταση, συνεπώς πολλοί μαθητές δεν είχαν χρόνο να διαπραγματευτούν όλα τα ερωτήματα.
- Υπάρχει επανάληψη όμοιων ερωτημάτων(*..όπως αυτό της χάραξης γραφικής παράστασης, εύρεση μονοτονίας-ακροτάτων-συνόλου τιμών..).*
- Απαιτούν πολύ καλό χειρισμό της Άλγεβρας, καθώς υπήρχαν πολλές πράξεις.
- Απουσιάζουν τα *''υπαρξιακά θεωρήματα''* για ακόμη μια χρονιά.
- Τα ερωτήματα $Γ_1$, $Δ_1$ και $Δ_4$ θα δυσκολέψουν την πλειονότητα των υποψηφίων.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Πρόκειται για ένα ιδαίτερα απαιτητικό διαγώνισμα, σαφώς δυσκολότερο από το αντίστοιχο περσινό που απευθύνεται σε πολύ καλά προετοιμασμένους μαθητές με καθαρό μυαλό.

ΕΚΤΙΜΗΣΗ

Το ποσοστό των υψηλών βαθμολογιών θα είναι σε αρκετά μεγάλο βαθμό μειωμένο σε σχέση με το περσινό.