# ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2018 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

11/06/2018

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΑΥΣΜΑ

ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

## ΘΕΜΑ Α.

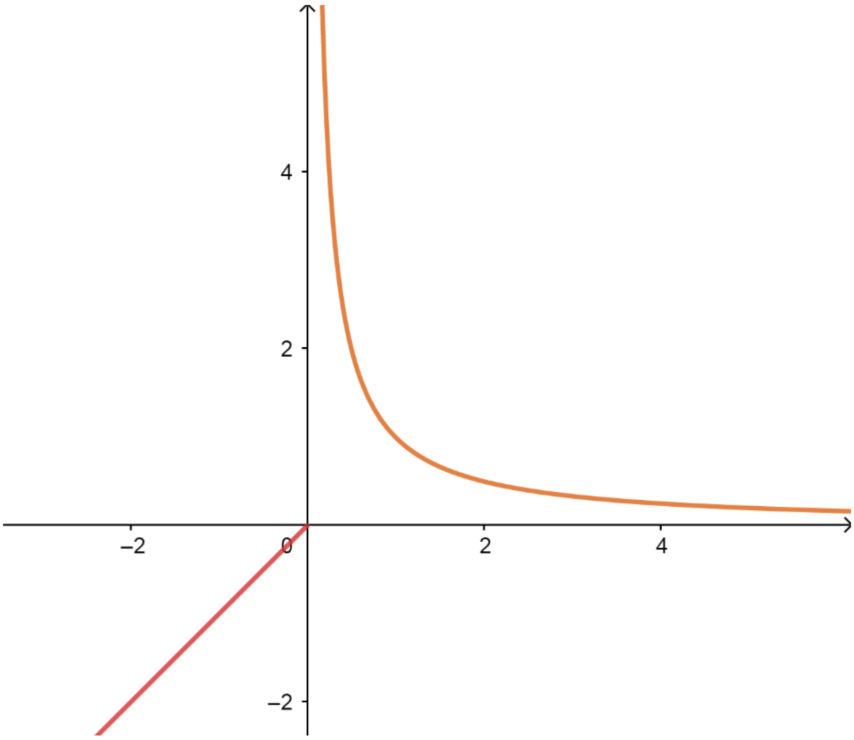
**Α1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 99.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

**Α2.** *α)* Ψ

**β)** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα η f είναι ''1-1'', δεν είναι όμως γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.




**Α3.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 216.

**Α4.** *α)* Λ  **β)** Λ  *γ)* Σ  **δ)** Σ  **ε)** Σ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

## ΘΕΜΑ Β.

**Β1.** Για κάθε $x \in R - \{0\}$ έχουμε:

$$f'(x) = \left(x - \frac{4}{x^2}\right)' = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 + 8}{x^3}$$

Οπότε:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 8}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x^3(x^3 + 8) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 8}{x^3} < 0 \Leftrightarrow x^3(x^3 + 8) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0)$

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | ‖ | + | |
| $f(x)$ | | ↗ | | ↘ | ‖ | ↗ | |

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΕΝΑΥΣΜΑ ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2]$ και στο $(0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 0)$.

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_0 = -2$, το $f(-2) = -3$.

**Β2.** Για κάθε $x \in R - \{0\}$ έχουμε:

$$f''(x) = \left(1 + \frac{8}{x^3}\right)' = -\frac{24x^2}{x^6} = -\frac{24}{x^4} < 0$$

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$.

Η f δεν έχει σημεία καμπής.

**Β3.** Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x - \dfrac{4}{x^2}\right) = -\infty$

Άρα η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ πλάγια ασύμπτωτη της f.

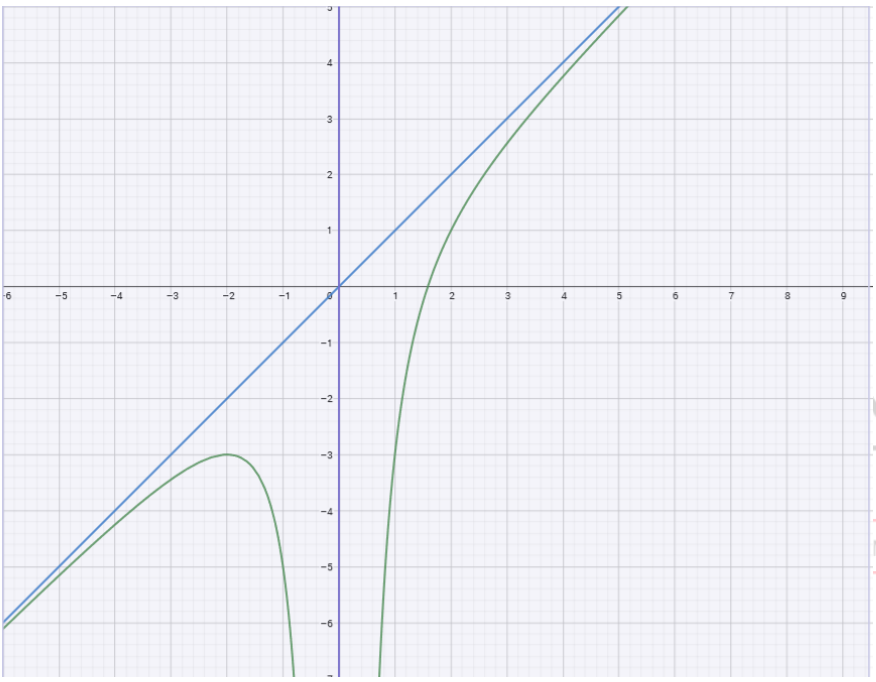
- $\lambda = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x - \dfrac{4}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3 - 4}{x^3} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3}{x^3} = 1$
- $\beta = \lim\limits_{x\to -\infty} \left[f(x) - \lambda x\right] = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right) = 0$

Επίσης:

- $\lambda = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x - \dfrac{4}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 - 4}{x^3} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{x^3} = 1$
- $\beta = \lim\limits_{x\to +\infty} \left[f(x) - \lambda x\right] = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right) = 0$

Επομένως η f έχει πλάγια ασύμπτωτη την $y = x$.

**Β4.** Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι:



## ΘΕΜΑ Γ.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΕΝΑΥΣΜΑ ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

**Γ1.** Έστω x το μήκος του σύρματος που χρησιμοποιήθηκε για να κατασκευάσουμε το τετράγωνο. Έτσι η πλευρά του τετραγώνου θα είναι $\frac{x}{4}$. Το μήκος λοιπόν που χρησιμοποιήθηκε για τον κύκλο είναι $8-x$.

Για τον κύκλο ακτίνας ρ θα είναι $2\pi\rho = 8 - x \Leftrightarrow \rho = \frac{8-x}{2\pi}$.

Αν $E_1$ το εμβαδόν του τετραγώνου και $E_2$ του κύκλου, θα είναι:

$$E_1 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16} \quad \text{και} \quad E_2 = \pi\rho^2 = \pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(8-x)^2}{4\pi} = \frac{64-16x+x^2}{4\pi}.$$

Το συνολικό λοιπόν εμβαδόν θα είναι:

$$E(x) = E_1 + E_2 = \frac{x^2}{16} + \frac{64-16x+x^2}{4\pi} = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, x \in (0,8)$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΕΝΑΥΣΜΑ ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

**Γ2.** Για κάθε $x \in (0,8)$, είναι: $E'(x) = \frac{1}{16\pi}\left[2(\pi+4)x - 64\right] = \frac{1}{8\pi}\left[(\pi+4)x - 32\right]$

Είναι:

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8\pi}\left[(\pi+4)x - 32\right] = 0 \Leftrightarrow x = \frac{32}{\pi+4}$$

$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8\pi}\left[(\pi+4)x - 32\right] > 0 \Leftrightarrow 8 > x > \frac{32}{\pi+4}$$

$$E'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8\pi}\left[(\pi+4)x - 32\right] < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{32}{\pi+4}$$

Η $E(x)$ ως συνεχής είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΕΝΑΥΣΜΑ ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = \frac{32}{\pi+4}$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $0$ | | $\frac{32}{\pi+4}$ | | $8$ |
| $E'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $E$ | | $\searrow$ | $o.\varepsilon$ | $\nearrow$ | |

Η πλευρά του τετραγώνου θα είναι $\frac{x_0}{4} = \frac{\frac{32}{\pi+4}}{4} = \frac{8}{\pi+4}$ και η διάμετρος του κύκλου είναι επίσης $\delta = 2\varrho = \frac{2}{2\pi}\left(8 - \frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{8}{\pi+4}$

**Γ3.** Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση Ε(x)=5 έχει μοναδική λύση για $x \in (0, 8)$.

Η Ε(x) είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right)$ οπότε

$$E(\Delta_1) = \left(\lim_{x\to \frac{32}{\pi+4}^-} E(x), \lim_{x\to 0^+} E(x)\right) = \left(\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right).$$

Η Ε(x) είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = \left(\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$ οπότε :

$$E(\Delta_2) = \left(E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x\to 8^-} E(x)\right) = \left(\frac{16}{\pi+4}, 4\right)$$

Αφού το $5 \in E(\Delta_1)$ τότε η εξίσωση Ε(x)=5 έχει μοναδική λύση στο $\Delta_1$, η οποία είναι μοναδική αφού Ε(x) γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1$ . Τέλος το $5 \notin E(\Delta_2)$ άρα η εξίσωση Ε(x)=5 είναι αδύνατη στο $\Delta_2$.

## ΘΕΜΑ Δ.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

**Δ1.** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση γινόμενο και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων , τότε:

$f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x \, , \, x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση f′ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση γινόμενο και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων , τότε:

$f''(x) = 2e^{x-\alpha} - 2 \, , \, x \in \mathbb{R}$

Παρατηρώ ότι $\quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > \alpha$$

Οπότε f κοίλη στο $(-\infty, \alpha]$ και f κυρτή στο $[\alpha, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής στο $x_0 = \alpha$

| x | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $\cap$ | | $\cup$ |

ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

**Δ2.** Στο $\Delta_1 = (-\infty, \alpha]$ η f′ γνησίως φθίνουσα και συνεχής τότε

$$f'(\Delta_1) = [f'(\alpha) \, , \lim_{x\to-\infty} f'(x)) = [2(1-\alpha), +\infty)$$

Με $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} 2e^{x-\alpha} - 2x = +\infty$ διότι

$$\lim_{x\to-\infty} 2e^{x-\alpha} = \lim_{u\to-\infty} e^{u} = 0$$

Θέτω $u = x - \alpha$ όταν το $x \to -\infty$ τότε το $u \to u_0$ με

$u_0 = \lim_{x\to-\infty} x - \alpha = -\infty$

Και $\lim_{x\to-\infty} -2x = +\infty$

επειδή α>1 τότε 1-α<0 άρα το $0 \in f'(\Delta_1)$ μοναδική ρίζα το $x_1 \in \Delta_1$

στο $\Delta_2 = [\alpha, +\infty)$ η f′ γνησίως αύξουσα και συνεχής τότε

$$f'(\Delta_2) = [f'(\alpha) \, , \lim_{x\to+\infty} f'(x)) = [2(1-\alpha), +\infty)$$

επειδή α>1 τότε 1-α<0 άρα το $0 \in f'(\Delta_1)$ μοναδική ρίζα το $x_2 \in \Delta_2$

επειδή $\quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} 2e^{x-\alpha} - 2x = 2\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{e^{x-\alpha}}{x} - 2\right)\right] = +\infty$

Διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x-\alpha}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(e^{x-\alpha})'}{(x)'}=$ [κανόνας D.L.H.]

$=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x-\alpha}=+\infty$, διότι θέτω $y=x-\alpha$ όταν $x\to-\infty$ τότε το $y\to y_0$ με $y_0=\lim\limits_{x\to-\infty}x-\alpha=+\infty$

Άρα δείξαμε ότι υπάρχουν $x_1, x_2$ με $x_1<x_2$ τέτοια ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$ , πρέπει επιπλέον να δείξω ότι αλλάζει και πρόσημο η $f'$ εκατέρωθεν των $x_1$ , $x_2$

Όταν $x<x_1 \xLeftrightarrow{f' \text{ γνησίως φθίνουσα}} f'(x)>f'(x_1)=0$ , οπότε f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, x_1]$

Όταν $x_1<f<\alpha \xLeftrightarrow{f' \text{ γνησίως φθίνουσα}} 0=f'(x_1)>f'(x)$ , οπότε f γνησίως φθίνουσα στο $[x_1,\alpha]$

Όταν $\alpha<f<x_2 \xLeftrightarrow{f' \text{ γνησίως αύξουσα}} f'(x)<f'(x_2)=0$ , οπότε f γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,x_2]$

Όταν $x_2<x \xLeftrightarrow{f' \text{ γνησίως αύξουσα}} 0=f'(x_2)<f'(x)$ , οπότε f γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,x_2]$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2$

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $\alpha$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f'$ | | $\searrow$ $+$ | | $\searrow$ $-$ | | $\nearrow$ $-$ | | $\nearrow$ $+$ | |
| $f$ | | $\nearrow$ | $\tau\mu$ | $\searrow$ | | $\searrow$ | $\tau\varepsilon$ | $\nearrow$ | |

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΕΝΑΥΣΜΑ ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

## Δ3.

### Α΄ ΤΡΟΠΟΣ

Είναι $f(\alpha)<f(1) \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha}>2-\alpha^2 \Leftrightarrow 2(e^{1-\alpha}-1)+\alpha^2-1>0$ που ισχύει διότι $e^{1-\alpha}>1-\alpha+1$ με $\alpha>1$. Άρα $e^{1-\alpha}-1>1-\alpha \Leftrightarrow 2(e^{1-\alpha}-1)>2-2\alpha \Leftrightarrow 2(e^{1-\alpha}-1)+\alpha^2-1>\alpha^2-2\alpha+1>0$.

### Β΄ ΤΡΟΠΟΣ

Είναι $f'(1)=2e^{1-a}-2=2(e^{1-a}-1)<0$, διότι $\alpha>1$ $\Leftrightarrow 1-\alpha<0 \Leftrightarrow e^{1-a}<1$ συνεπώς $1\in(x_1,x_2)$ αφού μόνο σε αυτό το διάστημα είναι $f'(x)<0$

Δηλαδή ισχύει η διάταξη $x_1<1<\alpha<x_2$

Τότε η εξίσωση

$$f(x)=f(1) \xLongleftrightarrow{1\in(x_1,x_2)\,\kappa\alpha\iota\ x\in(\alpha,x_2)\subseteq(x_1,x_2)} x=1$$

Διότι f γνησίως φθίνουσα στο $(x_1,x_2)$ οπότε και 1-1

Τελικά αδύνατη στο $(\alpha,x_2)$ αφού $1<\alpha$

**Δ4.** Η εφαπτόμενη (ε) της $C_f$ στο σημείο της $A(2,f(2))$ είναι:

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=-2x+2$$

Η f κυρτή στο $[\alpha,+\infty)$ , οπότε η εφαπτομένη της (ε) βρίσκεται κάτω από τη $C_f$ με εξαίρεση το σημείο επαφής της A, δηλαδή ισχύει $f(x)\geq -2x+2$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=2$, η $(x)\cdot\sqrt{x-2}$και η $(-2x+2)\cdot\sqrt{x-2}$ είναι συνεχής στο [2,3] ως πράξεις συνεχώς συναρτήσεων τότε:

$$f(x)\cdot\sqrt{x-2}\geq(-2x+2)\cdot\sqrt{x-2}\Rightarrow$$

$$\int_2^3 f(x)\cdot\sqrt{x-2}\,dx>\int_2^3(-2x+2)\cdot\sqrt{x-2}\,dx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_2^3 f(x)\cdot\sqrt{x-2}\,dx>-\frac{32}{15}$$

Αφού

$I=\int_2^3(-2x+2)\cdot\sqrt{x-2}\,dx$ ,θέτω $u=\sqrt{x-2}$ τότε $u^2=x-2$ οπότε $2udu=dx$

$$I=\int_0^1(-2(u^2+2)+2)u2udu=-2\int_0^1 2u^4+2u^2du=$$

$$= -2\left[\frac{2u^5}{5} + \frac{2u^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{32}{15}$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ