ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2023
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

04/06/2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ(ΣΕΛ.76)

Α2. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ(ΣΕΛ.155)

Α3. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ(ΣΕΛ.216)

Α4. α) ΣΩΣΤΟ

β) ΣΩΣΤΟ

γ) ΛΑΘΟΣ

δ) ΛΑΘΟΣ

ε) ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

Β1. *Π*ρέπει $h(x) \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \neq \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1.$

Άρα $D_f = (1,+\infty)$ *με τύπο* $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}=\dfrac{\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=\dfrac{\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}}{\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}}=\dfrac{x+1}{x-1}$

Είναι $D_r = D_g \cap D_h = [1,+\infty)$ *με τύπο* $r(x)=g(x)\cdot h(x)=(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}})(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}})=$

$=(\sqrt{x})^2-(\dfrac{1}{\sqrt{x}})^2 = x-\dfrac{1}{x}.$

Β2. i) f παρ/μη ως ρητή στο (1, +∞) με $f'(x)=$
$\dfrac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=-\dfrac{2}{(x-1)^2}<0$ *για κάθε* $x \in (1,+\infty)$, άρα η f γνησίως φθίνουσα στο (1,+∞) οπότε ορίζεται η f^{-1} . Αφού η f είναι συνεχής συνάρτηση το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f.

$f(1,+\infty)=(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to1^+} f(x))=(1,+\infty)$, αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$ *και* $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=+\infty,$ *διότι* $x-1>0$ *καθώς* $x\to1^+$

Είναι $f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1}=y \Leftrightarrow y(x-1)=x+1 \Leftrightarrow x(y-1)=y+1 \overset{y\neq1}{\Leftrightarrow} x=\dfrac{y+1}{y-1}$.

Άρα $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{x-1}=f(x),$ *με* $x\in(1,+\infty)$

Β3. Η r(x) είναι συνεχής στο [1,+∞) άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} r(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x-\frac{1}{x}) = +\infty$ επομένως δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

Ελέγχουμε για πλάγιες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{r(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x^2} = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}((r(x)-x)) = \lim_{x\to+\infty}(x-\frac{1}{x}-x) = 0$$

Άρα η ευθεία y=x είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_r στο $+\infty$.

Β4. $Είναι: ((f^{-1}(f(x)))^2 = 1+4r(x) \overset{f^{-1}(f(x))=x}{\Leftrightarrow} x^2 = 1+4(x-\frac{1}{x}) \Leftrightarrow x^2 = 1+4(x-\frac{1}{x}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^3-4x^2-x+4=0 \Leftrightarrow x^2(x-4)-(x-4)=0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1.$$

Άρα δεκτές οι λύσεις x=-1 και x=1 απορρίπτονται και η x=4 είναι η μοναδική λύση

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$άρα και στο $x_0=2$, επομένως θα έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$, άρα

$\lim\limits_{x\to 2^-}(-2x+4+e^{\lambda}) = \lim\limits_{x\to 2^+}(-x^2+4x-3+\lambda) \Leftrightarrow e^{\lambda} = \lambda+1 \Leftrightarrow e^{\lambda}-\lambda-1=0$

Θεωρούμε συνάρτηση $g(\lambda)=e^{\lambda}-\lambda-1,\ \lambda\in\mathbb{R}$,με $g(1)=0$. Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(\lambda)=e^{\lambda}-1$

$g'(\lambda)=0 \Leftrightarrow e^{\lambda}-1=0 \Leftrightarrow \lambda=0$

Για $\lambda<0 \Leftrightarrow e^{\lambda}-1<0 \Leftrightarrow g'(\lambda)<0 \Leftrightarrow g \searrow (-\infty,0)$

Για $\lambda>0 \Leftrightarrow e^{\lambda}-1>0 \Leftrightarrow g'(\lambda)>0 \Leftrightarrow g \nearrow (0,+\infty)$

Για $\lambda=0$ η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $g(0)=0$, το οποίο είναι μοναδικό, άρα $\lambda=0$.

Για $\lambda=0$ η f γίνεται: $f(x)=\begin{cases}-2x+5 & ,0\le x<2\\ -x^2+4x-3 & ,x\ge 2\end{cases}$

Γ2. Για $x\in[0,2)$ η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x)=-2<0 \Rightarrow f \searrow [0,2)$

Για $x \in (2, +\infty)$ η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = -2x+4 < 0$ για κάθε $x > 2$, άρα $f \searrow (2, +\infty)$

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Για $x = 0$ το $f(0) = 5$ είναι ολικό μέγιστο της συνάρτησης.

Γ3.

I. Η f είναι συνεχής στο [0,3] γιατί είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.
Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα [0,2) και (2,3] ως πολυωνυμική.
Για $x = 2$ έχουμε:

$$\lim_{x \to 2^-}\left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right) = \lim_{x \to 2^-}\left(\frac{-2x+5-1}{x-2}\right) = \lim_{x \to 2^-}\left(\frac{-2(x-2)}{x-2}\right) = -2$$

$$\lim_{x \to 2^+}\left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right) = \lim_{x \to 2^+}\left(\frac{-x^2+4x-4}{x-2}\right) = \lim_{x \to 2^+}\left(\frac{-(x-2)^2}{x-2}\right) = 0$$

Άρα η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 2$
Συνεπώς δεν ισχύει το ΘΜΤ στο [0,3]

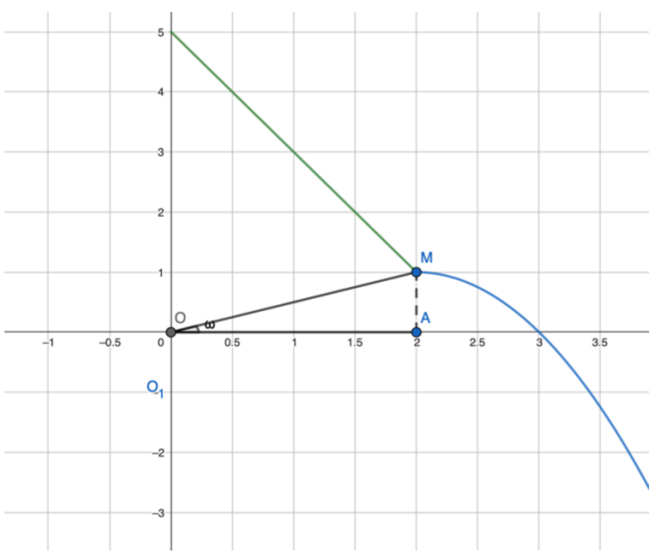
II. Βρίσκουμε την κλίση του τμήματος ΔΕ:

$$\lambda_{ΔΕ} = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = -\frac{5}{3}$$

Για $\xi < 2$: $f'(\xi) = -2 \Rightarrow -2 = -\frac{5}{3}$, αδύνατο.

Για $\xi > 2$: $f'(\xi) = -2\xi+4 \Rightarrow -2\xi+4 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow \xi = \frac{17}{6} < 3$, δεκτή λύση.

Γ4. Το σημείο κινείται κατακόρυφα από το Α προς το Μ, η γραφική παράσταση δίνεται στο παρακάτω σχήμα



Για τη γωνία ω ισχύει ότι :

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{y}{2}\Rightarrow \varepsilon\varphi(\omega(t))=\frac{y(t)}{2}\Rightarrow \frac{\omega'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2(\omega(t))}=\frac{y'(t)}{2}$$

$$\Rightarrow \omega'(t)(1+\varepsilon\varphi^2(\omega(t)))=\frac{y'(t)}{2}\Leftrightarrow \omega'(t)=\frac{y'(t)}{2(1+\varepsilon\varphi^2(\omega(t)))}$$

Για $t=t_0$: $y'(t_0)=\frac{1}{2}$, $y(t_0)=1$

Άρα $\omega'(t_0)=\frac{y'(t_0)}{2(1+\varepsilon\varphi^2(\omega(t_0)))}=\frac{\frac{1}{2}}{2\left(1+\frac{1}{4}\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{10}{4}}=\frac{1}{5}\ \frac{rad}{sec}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)x-(\ln x+\alpha x)}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow x=e$$

- $f'(x)>0\Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}>0\Leftrightarrow \ln x<1\Leftrightarrow x<e$, με $x>0$. Άρα η f γν. αύξουσα στο (0,e].
- $f'(x)<0\Leftrightarrow x>e$. Άρα η f γν. φθίνουσα στο [e, +∞)

- Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(e)=\frac{1+\alpha\cdot e}{e}$, με $x>0$

Η f είναι συνεχής συνάρτηση και το σύνολο τιμών της είναι το $f(A)=\left(-\infty,1+\frac{1}{e}\right]$

Άρα: $\frac{1+\alpha\cdot e}{e}=1+\frac{1}{e}\Leftrightarrow 1+\alpha\cdot e=e+1\Leftrightarrow \alpha=1$

Δ2. • Η f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

• $f\left(\frac{1}{2}\right)=-2\ln 2+1=-\ln 4+\ln e<0$

$f(1)=1>0$

Άρα $f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f(1)<0$

Από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ρίζα $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$

και επειδή η f είναι γν. αύξουσα στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},1\right)\subseteq(0,e]$, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Για κάθε $x>e$ ισχύει $f(x)=\frac{\ln x+x}{x}>0$ καθώς $\ln x>1$

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 που ανήκει στο $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Δ3. (i) Αν $x\in[e,+\infty)$ η f είναι γν. φθίνουσα, άρα και ¨1-1¨. Τότε:

$f(x)=f(4)\Leftrightarrow x=4$

Αν $x\in(0,e)$ τότε: $f(x)=f(4)\Leftrightarrow f(x)=\frac{\ln 2}{2}+1$

Όμως: $f(2)=\frac{\ln 2}{2}+1$, άρα η $x=2$ λύση της εξίσωσης

$f(x)=f(4)\Leftrightarrow f(x)=\frac{\ln 2}{2}+1$ στο διάστημα αυτό και επειδή η f γν. αύξουσα στο (0,e), η ρίζα είναι μοναδική.

Άρα ισχύει το ζητούμενο.

(ii) $2^x\le x^2\Leftrightarrow \ln 2^x\le \ln x^2\Leftrightarrow x\ln 2\le 2\ln x\Leftrightarrow 2x+x\ln 2\le 2\ln x+2x\Leftrightarrow$

$$\frac{x(2+\ln 2)}{2} \le \ln x + x \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} + 1 \le f(x)$$

Αν $x \in (0,e)$: $f(x) \ge f(2) \overset{f:\square}{\Leftrightarrow} x \ge 2$

Από συναλήθευση έχουμε: $x \in [2,e)$

Αν $x \in [e,+\infty)$: $f(x) \ge f(4) \overset{f:\square}{\Leftrightarrow} x \le 4$

Από συναλήθευση έχουμε: $x \in [e,4]$

Συνεπώς: $x \in [2,e) \cup [e,4] \Leftrightarrow x \in [2,4]$

Δ4. $E = \int_{-\ln 2}^{0} |g(x)|dx$

Έχουμε: $g(x) = f(e^x) \cdot \dfrac{1-x}{e^x}$

- $-1 \le \ln 2 \le x \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 0 \Leftrightarrow 1 \ge -x \ge 0 \Leftrightarrow 2 \ge 1 - x \ge 1 > 0$
- $x \in [-\ln 2, 0] \Leftrightarrow -\ln 2 \le x \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \le e^x \le 1$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΕΝΑΥΣΜΑ
ΤΣΙΤΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΠΑΠΠΑ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

Τότε: $f(e^x) = 0 \Rightarrow e^x = x_0 \Rightarrow x = \ln x_0$

Όμως:

- $\ln x_0 \le x \le 0 \Leftrightarrow x_0 \le e^x \le 1 \overset{f:\square}{\Leftrightarrow} f(x_0) \le f(e^x) \Leftrightarrow 0 \le f(e^x)$

Και

- $-\ln 2 \le x \le \ln x_0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \le e^x \le x_0 \overset{f:\square}{\Leftrightarrow} f(e^x) \le (x_0) \Leftrightarrow f(e^x) \le 0$

Άρα έχουμε :

$$E(\Omega) = \int_{\ln x_0}^{0} g(x)dx - \int_{-\ln 2}^{\ln x_0} g(x)dx$$

Θέτουμε $y = e^x$ και έχουμε $dy = e^x dx$

Ενώ για $x=-\ln 2$ είναι $y=\frac{1}{2}$, για $x=0$ είναι $y=1$ και για $x=\ln x_0$ είναι $y=x_0$

Άρα:

$$E(\Omega)=-\int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(y)f'(y)dy+\int_{x_0}^{1} f(y)f'(y)dy=$$

$$-\frac{1}{2}\left[f^2(y)\right]_{\frac{1}{2}}^{x_0}+\frac{1}{2}\left[f^2(y)\right]_{x_0}^{1}=\frac{f^2(1)+f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2}=\left(2\ln^2 2-2\ln 2+1\right)\tau.\mu$$